ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia, 1º semestre, EN prova 2ª parte matéria 10. 01. 20

1hora. (10 valores – 60% da nota final)

Nome:____Turma:________

Espaço reservado para classificações

1a.(10)	2.(15)	3a.(10)	4.(10)	6.(5)
1b.(15)		3b.(10)	5.(10)	7.(15)

Atenção: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.

1. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional com função densidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{3}{4}\,(x + y) \quad (0 < x < 1; 0 < y < 2x)$$

a. Obtenha as funções densidade marginais de X e Y.
b. Calcule $P(X > 1/2, Y > 1)$ e calcule também $E(Y|X = x)$.

2. Uma companhia aérea voa com aviões de pequenas dimensões, que **podem acomodar até oito passageiros**. A companhia aérea determinou que a probabilidade de um passageiro com bilhete não comparecer para um vôo é de 0.2 e é independente da decisão dos restantes passageiros. Para cada vôo, a empresa vende bilhetes aos primeiros 10 compradores correndo o risco de *overbooking*. Seja X a variável que representa número de passageiros com bilhete que não comparecem a determinado vôo e Y o número de bilhetes vendidos. A função probabilidade de Y é dada por:

y	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**outros**
$f_Y(y)$	0.25	0.35	0.25	0.10	0.05	0

Qual a probabilidade de se registar uma situação de *overbooking*, isto é, de comparecerem mais pessoas para embarcar do que existem lugares no avião?

3. Clientes chegam a um balcão de atendimento seguindo um processo de Poisson com taxa média de 7 por hora.

a. Qual a probabilidade de se atenderem 10 ou mais clientes em 2 horas?
b. Sabendo que se atenderam 10 clientes nas 2 horas qual a probabilidade de exatamente 3 deles terem sido atendidos na 1ª hora?

4. O número de pessoas que diariamente acorre a determinado serviço pode ser bem modelado por uma variável aleatória de média 10 e variância 9. Se considerarmos que as chegadas em dias diferentes são independentes qual a probabilidade (eventualmente aproximada) para que o número total de pessoas a acorrem ao serviço nos próximos 120 dias seja superior a 1250?

5. Admita que os custos de produção de determinado artigo são bem modelados por uma variável aleatória X com distribuição G(3.5; 0.5). Qual a probabilidade dos custos ultrapassarem 9 euros?

6. De uma população normal de média 10 e variância 16 vai-se recolher uma amostra de dimensão 25. Qual a probabilidade de a média da amostra ser superior a 12?

7. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de média 1 e variância 4 e seja Y outra variável aleatória, independente de X, com distribuição também ela normal mas de média 2 e variância 1. Calcule $P\left(\frac{X-1}{|Y-2|} > 6.156\right)$

Solução

1. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional com função densidade conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = (3/4)\,(x+y) \quad (0 < x < 1; 0 < y < 2x)$$

a. Obtenha as funções densidade marginais de X e Y.

$$f_X(x) = \int_0^{2x} \left(\tfrac{3}{4}\right)(x+y)\,dy = \left(\tfrac{3}{4}\right)(xy + y^2/2)_0^{2x} = 3x^2 \quad 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_{y/2}^{1} \left(\tfrac{3}{4}\right)(x+y)\,dx = \left(\tfrac{3}{4}\right)\left(\tfrac{x^2}{2} + xy\right)_{y/2}^{1} = \tfrac{3}{4}\left(\tfrac{1}{2} + y - 5y^2/8\right) \quad 0 < y < 2$$

b. Calcule $P(X > 1/2, Y > 1)$ e calcule também $E(Y|X = x)$.

$$P(X > 1/2, Y > 1) = \int_{1/2}^{1}\int_{1}^{2x} \frac{3}{4}(x+y)dydx = \frac{3}{4}\int_{1/2}^{1}\left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{1}^{2x} dx \quad = \frac{3}{4}\int_{1/2}^{1} 4x^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)dx$$
$$= \frac{3}{4}\int_{1/2}^{1} 4x^2 - x - \frac{1}{2}dx = \frac{3}{4}\left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_{1/2}^{1} = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{4}{24} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right)\right]$$
$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{5}{24}\right) = \frac{3}{4} * \frac{13}{24} = \frac{13}{32}$$

$$E(Y|X = x) = \int_0^{2x} y * \frac{\frac{3}{4}(x+y)}{3x^2} dy = \frac{1}{4}\int_0^{2x} y * \frac{x+y}{x^2} dy = \frac{1}{4}\int_0^{2x} \frac{xy + y^2}{x^2} dy$$

$$= \frac{1}{4} * \frac{1}{x^2}\int_0^{2x} xy + y^2 dy = \frac{1}{4x^2}\left[x\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right]_0^{2x} = \frac{1}{4x^2}\left(2x^3 + \frac{8x^3}{3}\right)$$
$$= \frac{7x}{6} \quad 0 < x < 1, x \text{ fixo}$$

2. Uma companhia aérea voa com aviões de pequenas dimensões, que **podem acomodar até oito passageiros**. A companhia aérea determinou que a probabilidade de um passageiro com bilhete não comparecer para um vôo é de 0.2 e é independente da decisão dos restantes passageiros. Para cada vôo, a empresa vende bilhetes aos primeiros 10 compradores correndo o risco de *overbooking*. Seja X a variável que representa número de passageiros com bilhete que não comparecem a determinado vôo e Y o número de bilhetes vendidos. A função probabilidade de Y é dada por:

y	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**outros**
$f_Y(y)$	0.25	0.35	0.25	0.10	0.05	0

Qual a probabilidade de se registar uma situação de *overbooking*, isto é, de comparecerem mais pessoas para embarcar do que existem lugares no avião?

Existirá uma situação de *overbooking* se $Y = 9\ e\ X = 0$, $Y = 10\ e\ X = 0$ e $Y = 10\ e\ X = 1$
$X \mid Y = y \sim B(y, 0.2)$

$$
\begin{aligned}
P(overbooking) &= P(X=0,Y=9)+P(X=0,Y=10)+P(X=1,Y=10)\\
&= P(X=0|Y=9)\times P(Y=9)+P(X=0|Y=10)\times P(Y=10)+P(X=1|Y=10)\times P(Y=10)\\
&= 0.1342\times 0.10+0.1074\times 0.05+0.2684\times 0.05\\
&= 0.03221
\end{aligned}
$$

3. Clientes chegam a um balcão de atendimento seguindo um processo de Poisson com taxa média de 7 por hora.

   a. Qual a probabilidade de se atenderem 10 ou mais clientes em 2 horas?

      Y- nº clientes atendidos em 2 horas tendo $Y \sim Po(2*7)$

      $P(Y \geq 10) = 1 - P(Y < 10) = 1 - F_Y(9)$=1-0.1094=0.8906

   b. Sabendo que se atenderam 10 clientes nas 2 horas qual a probabilidade de exatamente 3 deles terem sido atendidos na 1ª hora?

      Seja X_1 o número de clientes atendidos na 1ª hora e X_2 o número de clientes atendidos na 2ª hora. $X_1 \sim Po(7)$, $X_2 \sim Po(7)$ e X_1, X_2 independentes.

$$
P(X_1=3|X_1+X_2=10)=\frac{P(X_1=3,X_1+X_2=10)}{P(X_1+X_2=10)}=\frac{P(X_1=3,X_2=7)}{P(Y=10)}=\frac{P(X_1=3)\times P(X_2=7)}{P(Y=3)}
$$

$$
=\frac{0.0521\times 01490}{0.0663}=0.1171
$$

4. O número de pessoas que diariamente acorre a determinado serviço pode ser bem modelado por uma variável aleatória de média 10 e variância 9. Se considerarmos que as chegadas em dias diferentes são independentes qual a probabilidade (eventualmente aproximada) para que o número total de pessoas a acorrem ao serviço nos próximos 120 dias seja superior a 1250?

   X_i Nº de pessoas que acorrem ao serviço no dia i . Sucessão de v.a. i.i.d. com $E(X_i)=\mu=10$ e $\mathrm{var}(X_i)=\sigma^2=9$

   Sendo a distribuição de X_i desconhecida, aplica-se o TLC com correção de continuidade já que X é v.a. discreta (trata-se de uma contagem). Assim $Z=\dfrac{\sum_{i=1}^{120} X_i - 120\mu}{\sigma\sqrt{120}} \overset{a}{\sim} n(0,1)$

$$
P\left(\sum_{i=1}^{120} X_i > 1250\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{120} X_i \leq 1250\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1250.5-120\times 10}{3\sqrt{120}}\right)
$$

$$
= 1-\Phi(1.5366) \approx 1-0.9382 = 0.0618
$$

5. Admita que os custos de produção de determinado artigo são bem modelados por uma variável aleatória X com distribuição G(3.5; 0.5). Qual a probabilidade dos custos ultrapassarem 9 euros?

   $X \sim G(3.5;0.5) \Leftrightarrow X \sim \chi^2_{(7)}$ então $P(X>9) \approx 0.25$

6. De uma população normal de média 10 e variância 16 vai-se recolher uma amostra de dimensão 25. Qual a probabilidade de a média da amostra ser superior a 15?

   $X \sim n(10;16)$ logo $\bar{X} \sim n\left(10;\dfrac{16}{25}\right)$ isto é $Z=\dfrac{\bar{X}-10}{4/5} \overset{a}{\sim} n(0,1)$

$$
P(\bar{X}>12)=1-\Phi\left(\frac{12-10}{4/5}\right)=1-\Phi\left(\frac{10}{4}\right)=1-\Phi(2.5)=1-0.9938=0.0062
$$

7. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de média 1 e variância 4 e seja Y outra variável aleatória, independente de X, com distribuição também ela normal mas de média 2 e variância 1. Calcule $P\left(\frac{X-1}{|Y-2|} > 6.156\right)$

$X \sim n(1;4)$ logo $\frac{X-1}{2} \sim n(0;1)$.

De forma semelhante $Y \sim n(2;1)$ logo $\frac{Y-2}{1} = (Y-2) \sim n(0;1)$ e portanto $(Y-2)^2 \sim \chi^2_{(1)}$

Assim $T = \frac{\frac{X-1}{2}}{\sqrt{(Y-2)^2/1}} \sim t_{(1)}$. Simplificando $T = \frac{X-1}{2|Y-2|} \sim t_{(1)}$

Assim, $P\left(\frac{X-1}{|Y-2|} > 6.156\right) = P(2T > 6.256) = P\left(T > \frac{6.156}{2}\right) = P(T > 3.078) = 0.1$